ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

УДК 744:62

А.В. Иващенко, Т.М. Кондратьева*
*НОУ ВПО «СФГА», *ФГБОУ ВПО «МГСУ»*

ПРОЕКТИВНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ НА ПРОЕКТИВОГРАФИЧЕСКИХ ЧЕРТЕЖАХ

Предложена оптимизация компьютерного метода получения новых форм многогранников на базе проективографических чертежей (следовых эпюров). Предлагаемый метод основан на использовании закономерностей, имеющихся между прямыми, входящими в состав чертежа, — известных конфигураций проективной геометрии (полных четырехсторонников, конфигурации Дезарга, конфигураций Паппа и др.). Подробно рассмотрены процедуры анализа проективографического чертежа на наличие в нем конфигураций полного четырехсторонника и конфигураций Паппа.

Ключевые слова: формообразование многогранников, проективографический метод, следовые эпюры, автоматизация, оптимизация, проективные конфигурации, полный четырехсторонник, конфигурация Паппа.

В процессе работы над получением новых многогранных форм проективографическим методом, разработанным В.Н. Гамаюновым [1—4] на основе известных моделей многогранников [5—10], на первом этапе работы требуется рассчитать параметры проективографических чертежей, а затем их построить.

Возможны два подхода к получению проективографических чертежей компьютерным методом. Первый вариант основывается на использовании аппарата аналитической геометрии [11—15]. При этом вначале рассчитываются параметры многогранника (ядра системы плоскостей), затем получают уравнения плоскостей граней этого многогранника и, наконец, получают уравнения прямых — следов плоскостей граней на выбранной эпюрной плоскости. Такой способ на всех стадиях своего применения требует использования алгоритмов арифметики с плавающей точкой, что, с одной стороны, приводит к некоторым потерям точности результатов, и, с другой стороны, большим затратам машинного времени на выполнение этих операций по сравнению с операциями целочисленной арифметики [16].

Другой вариант может основываться на построении проективографического чертежа, используя определенные закономерности, имеющиеся между прямыми, входящими в его состав. Так, например, в любом проективографическом чертеже имеется ряд известных из теории проективной геометрии конфигураций — полные четырехсторонники, конфигурации Дезарга, конфигурации Паппа, конфигурации Паскаля и др. [17—19]. Поскольку состав этих конфигураций инвариантен по отношению к проективным изменениям исходного ядра, то, зная их, можно избежать расчетов при решении уравнений по нахождению прямых проективографического чертежа аналитическим путем, получая их на основании принадлежности к той или иной конфигурации. Таким

© Иващенко А.В., Кондратьева Т.М., 2015

образом можно получить определенный выигрыш как в точности получения результатов, так и в затратах машинного времени. Однако в отличие от первого способа, здесь будет иметь значение последовательность построения прямых, составляющих проективографический чертеж.

Известна роль базовых проективных конфигураций в теоретическом исследовании проективной геометрии. Так, например, конфигурация «полный четырехсторонник» позволяет ввести систему однородных координат на любой проективной плоскости, следовательно, любой проективографический чертеж может быть параметризован с помощью этой конфигурации. Конфигурации Паскаля и Паппа (как вырожденный случай) позволяют рассматривать кривые (коники) на проективографическом чертеже.

Конфигурация Дезарга позволит рассматривать коллинеации и гомологии на проективографическом чертеже. Таким образом, нахождение этих базовых конфигураций существенно обогатит набор методов работы и использования проективографических чертежей.

Рассмотрим подробно процедуру анализа проективографического чертежа на наличие в нем конфигураций полного четырехсторонника.

Поставленная задача решается в несколько этапов. Вначале на некоем проективографическом чертеже определенного типа (в статье рассматривается одноэпюрный вариант 48-гранной октаэдрической системы плоскостей) производится поиск конфигураций (пока что ограничиваемся конфигурациями полного четырехсторонника).

На следующем этапе нужно определить соотношения между найденными конфигурациями. Сначала необходимо найти общие прямые, принадлежащие двум разным конфигурациям, затем — общие пары прямых, если таковые имеются, и, наконец, общие тройки прямых, если таковые имеются.

Полученная информация используется для построения последовательности поэлементного получения проективографического чертежа того же типа с произвольными исходными данными многогранника ядра (очередность построения прямых чертежа).

Наиболее простая из вышеперечисленных конфигураций — полный четырехсторонник, состоящий из шести взаимно пересекающихся линий и семи точек. Разумеется, в наиболее общем случае возможны совпадения двух вершин четырехсторонника, и он становится трехсторонником. Но мы такой вырожденный в проективном смысле вариант рассматривать не будем.

Рассмотрим проективографический чертеж октаэдрического 48-гранника общего положения (рис. 1). Он состоит из 46-и прямых (множество M0). Несмотря на обилие пересекающихся прямых, отыскать конфигурацию полного четырехсторонника непросто.

Для этого необходимо выполнить следующие действия. Рассмотрим все точки проективографического чертежа, степень инцидентности которых не менее трех (в которых пересекаются по меньшей мере три прямые) — множество M1.

Затем будем последовательно перебирать все четверки точек из M1 (кандидаты, подмножество K), такие, что бы любые из трех точек подмножества K не лежали на одной прямой — это найденное подмножество четверок точек назовем M2.

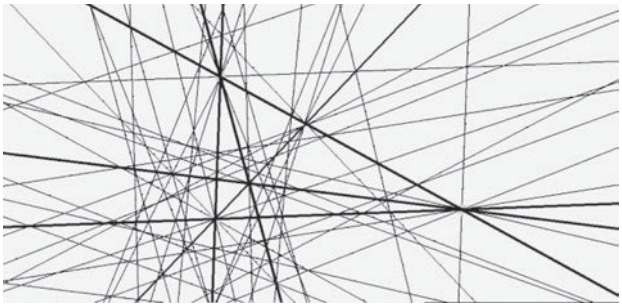

Рис. 1. Проективографический чертеж октаэдрического 48-гранника общего положения

Последовательно рассматривая все элементы M2, будем отбирать из них только такие, у которых любые две точки из четверки инцидентны прямой на проективографическом чертеже. Выбранные в результате этого вторичного прохода элементы и будут составлять множество полных четырехсторонников — множество M3.

Пример одного из таких полных четырехсторонников показан на рис. 1. Следует особо отметить, что на проективной плоскости любые два полных четырехсторонника эквивалентны, но на евклидовой плоскости имеются определенные особенности, приводящие к возможным различиям. Во-первых, приходится считаться с вырожденными случаями (в аффинном смысле, т.е. случаями параллельности противоположных сторон, когда четырехугольник представляет собой трапецию или прямоугольник, или ромб). Во-вторых, в невырожденных случаях имеются два различных варианта взаимного расположения его вершин: 1) когда выпуклая оболочка четырех точек представляет собой четырехугольник; 2) выпуклая оболочка является треугольником, а сам четырехугольник представляет собой невыпуклую фигуру (этот случай как раз и представлен на рис. 1).

Поэтому в дальнейшем множество найденных конфигураций полного четырехсторонника можно проанализировать на количественное соотношение в них конфигураций первого или второго типа.

Конфигурация Паппа состоит из девяти прямых и девяти точек. Поскольку конфигурация сложнее, чем полный четырехсторонник, то алгоритм поиска соответственно усложняется. Назовем множеством P множество из девяти точек и девяти прямых, удовлетворяющих условиям существования конфигурации Паппа. Вырожденные в проективном отношении случаи совпадения точек не рассматриваем. Последовательность алгоритмических шагов для построения конфигурации Паппа следующая:

1) для каждой прямой на проективографическом чертеже составим множество инцидентных точек, степень инцидентности которых не менее трех — получим 46 наборов множеств M2(i), i = 1…46;

2) последовательно рассматриваем каждую пару прямых из M0, и для каждой прямой из этой пары последовательно перебираем все тройки точек из M2(i1) и M2(i2), здесь i1, i2 относятся соответственно к первой и второй выбранным прямым. Анализируем выбранную пару на удовлетворение условию замкнутого шестисторонника, у которого каждая сторона принадлежит мно-

жеству M0, и при этом вершины шестисторонника в чередующемся порядке попеременно принадлежат M2(i1) и M2(i2). Таким образом последовательно перебираются прямые из M0 в качестве «строительного материала» для шестисторонника;

3) для каждого случая выполнения условия 2 продолжаем проверку кандидата в конфигурацию Паппа — в множестве M1 должны найтись точки, инцидентные всем трем парам пересекающихся противоположных сторон шестиугольника, и если это так, то добавляем все эти точки к множеству P. Осталось проверить наличие в M0 прямой, инцидентной полученным точкам пересечений пар противоположных сторон. И если это так, то конфигурация Паппа построена.

Затем можно рассмотреть более сложные конфигурации, в которые входят полные четырехсторонники (например, конфигурации Дезарга), и провести анализ проективографического чертежа на их наличие, но эта отдельная тема будет рассмотрена в соответствующей статье.

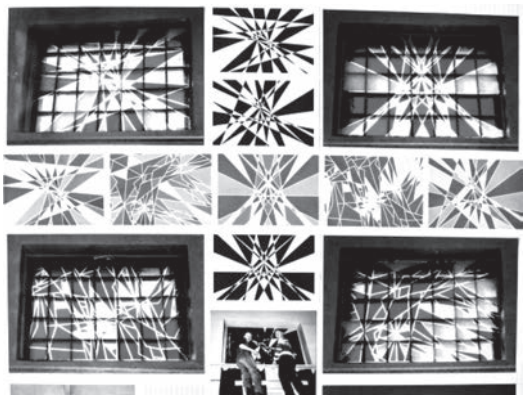

Рис. 2. Элементы декора, разработанные на основе проективографических чертежей

Несмотря на то, что проективографический метод используется в основном как инструмент формообразования трехмерных многогранных объектов [20, 21], возможно также применение непосредственно самих проективографических чертежей в архитектуре и дизайне для создания элементов декора наружных и внутренних стен и витражей (рис. 2).

Библиографический список

1. *Гамаюнов В.Н.* Проективография. Геометрические основы художественного конструирования для аспирантов слушателей ФПК и студентов хужожественно-графического факультета. М. : МГПИ, 1976. 25 с.

2. *Гольцева Р.И.* Геометрия многогранных n-эпюрных систем // Формообразование в строительстве и архитектуре. М. : МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1986. С. 175—223.

3. *Соболев Н.А.* Общая теория изображений. М. : Архитектура-С, 2004. 672 с.

4. *Калиничева М.М., Жердяев Е.В., Новиков А.И.* Научная школа эргодизайна ВНИИТЭ: предпосылки, истоки, тенденция становления : монография. М. : ВНИИТЭ ; Оренбург : ИПК ГОУ ОГУ, 2009. 368 с.

5. *Веннинджер М.* Модели многогранников. М. : Мир, 1974. 236 с.

6. *Залгаллер В.А.* Выпуклые многогранники с правильными гранями // Записки научных семинаров ЛОМИ. М. ; Л. : Наука, 1967. Т. 2. С. 5—221.

7. *Dutch S.* Polihedra wich Regular Poligon Faces. Режим доступа: http://www.uwgb.edu/DUTCHS/symmetry/johnsonp.htm. Дата обращения: 18.11.2014.

8. *Sutton D.* Platonic & Archimedean Solids: the geometry of space/written and illustrated. New York : Walker & Company, 2002. 64 p.

9. *Гурин А.М.* К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями // Сибирские электронные математические известия. 2010. Т. 7. С. 5—23.

10. *Альсина К.* Мир математики : в 40 т. Т. 23. Тысяча граней геометрической красоты. Многогранники / пер. с исп. М. : Де Агостини, 2014. 144 с.

11. *Иващенко А.В.* Модели представления элементов системы проективографических эпюр и алгоритмы их определения // Молодые голоса : сб. науч.-исслед. работ аспирантов и соискателей. М. : МГОПУ, 2000. Вып. 2. С. 12—19.

12. *Иващенко А.В., Кондратьева Т.М.* Проективографические чертежи многокомпонентных систем многогранников // Вестник МГСУ. 2012. № 6. С. 155—160.

13. *Иващенко А.В., Кондратьева Т.М.* Проективографический анализ многогранников Джонсона // Вестник МГСУ. 2013. № 5. С. 226—229.

14. *Иващенко А.В., Кондратьева Т.М.* Автоматизация получения проективографических чертежей тел Джонсона // Вестник МГСУ. 2014. № 6. 179—183.

15. *Иващенко А.В., Знаменская Е.П.* Конфигурация Дезарга в архитектурном и дизайн-проектировании // Вестник МГСУ. 2014. № 9. С. 154—160.

16. *Никулин Е.А.* Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики. СПб. : БХВ-Петербург, 2003. 560 с.

17. *Четверухин Н.Ф.* Высшая геометрия. М. : Учпедгиз, 1939. 144 с.

18. *Юнг Дж.В.* Проективная геометрия / пер. с англ. под ред. В.Ф. Кагана. М. : Изд-во иностр. литер., 1949. 184 с.

19. *Хартсхорн Р.* Основы прективной геометрии / пер. с англ. Е.Б. Шабат ; под ред. И.М. Яглова. М. : Мир, 1970. 160 с.

20. *Филин Ю.Н., Веселов В.И., Георгиевский О.В.* Инновационное преобразование формографики кубических моделей в свете решения проблем развития экологически значимых форм // Инновации: перспективы, проблемы, достижения : сб. тр. Междунар. науч.-практ. конф. (27 мая 2013 г.) / под ред. А.А. Гажура. М. : РЭУ им. Г.В. Плеханова, 2013. С. 277—282.

21. *Картавцев И.С., Веселов В.И., Георгиевский О.В., Филин Ю.Н.*. Архикуб-изоконструктор трансформации формографики // Экономически эффективные и экологически чистые инновационные технологии : сб. тр. Междунар. науч.-практ. конф. М. : РЭУ им. Г.В. Плеханова, 2013. С. 139—143.

Поступила в редакцию в декабре 2014 г.

Об авторах: **Иващенко Андрей Викторович** — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры дизайна, **Столичная финансово-гуманитарная академия (НОУ ВПО «СФГА»)**, 109088, г. Москва, ул. Шарикоподшипниковская, д. 15, ivashchenko_a@inbox.ru;

Кондратьева Татьяна Михайловна — кандидат технических наук, доцент, заведующая кафедрой начертательной геометрии и графики, **Московский государственный строительный университет (ФГБОУ ВПО «МГСУ»)**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, 8 (499) 183-24-83, grafika@mgsu.ru.

Для цитирования: *Иващенко А.В., Кондратьева Т.М.* Проективные конфигурации на проективографических чертежах // Вестник МГСУ. 2015. № 5. С. 141—147.

A.V. Ivashchenko, T.M. Kondrat'eva

PROJECTIVE CONFIGURATIONS IN PROJECTIVE GEOMETRICAL DRAWINGS

The article focuses on the optimization of the earlier discussed computer method of obtaining new forms of polyhedra based on projective geometry drawings (trace Diagrams).

While working on getting new multifaceted forms by projective geometry methods based on the well-known models of polyhedra on the first stage of the work it is required

to calculate the parameters of projective geometry drawings, and then to build them. This is an often used apparatus of analytical geometry. According to it, at first the parameters of the polyhedron (core system of planes) are calculated, then we obtain the equation of the plane of the face of the polyhedron, and finally we obtain the equations of lines — the next plane faces on the selected curve plane. At each stage of application such a method requires the use of the algorithms of floating point arithmetic, on the one hand, leads to some loss of accuracy of the results and, on the other hand, the large amount of computer time to perform these operations in comparison with integer arithmetic operations.

The proposed method is based on the laws existing between the lines that make up the drawing — the known configurations of projective geometry (complete quadrilaterals, configuration of Desargues, Pappus et al.).

The authors discussed in detail the analysis procedure of projective geometry drawing and the presence of full quadrilaterals, Desargues and Pappus configurations in it.

Since the composition of these configurations is invariant with respect to projective change of the original nucleus, knowing them, you can avoid the calculations when solving the equations for finding direct projective geometry drawing analytically, getting them on the basis of belonging to a particular configuration. So you can get a definite advantage in accuracy of the results, and in the cost of computer time. Finding these basic configurations significantly enriches the set of methods and the use of projective geometry drawings.

Key words: shaping of polyhedrons, projective geometry method, trace diagrams, automation, optimization, projective configurations, full quadrilateral, configuration of Pappus.

References

1. Gamayunov V.N. *Proektivografiya. Geometricheskie osnovy khudozhestvennogo konstruirovaniya dlya aspirantov slushateley FPK i studentov khuzhozhestvenno-graficheskogo fakul'teta* [Projectography. Geometric Foundations of Artistic Design for Postgraduate Students of FPK and Students of Artistic-Graphical Department]. Moscow, MGPI Publ., 1976, 25 p. (In Russian)

2. Gol'tseva R.I. Geometriya mnogogrannykh n-epyurnykh sistem [Polyhedral Geometry of n-Curve Systems]. *Formoobrazovanie v stroitel'stve i arkhitekture: sbornik nauchnykh trudov* [Shaping in Construction and Architecture: Collection of Scientific Works]. Moscow, MISI Publ., 1986, pp. 175—223. (In Russian)

3. Sobolev N.A. *Obshchaya teoriya izobrazheniy* [General Theory of Image] Moscow, Arkhitektura-S Publ., 2004, pp. 489—491. (In Russian)

4. Kalinicheva M.M., Zherdyaev E.V., Novikov A.I. *Nauchnaya shkola ergodizayna VNIITE: predposylki, istoki, tendentsiya stanovleniya : monografiya* [Scientific School of Ergodesign All-Russian Research Institute of Technical Aesthetics: Prerequisites, Origins, Generation Tendency : Monograph]. Moscow, VNIITE Publ., Orenburg, IPK GOU OGU Publ., 2009, 368 p. (In Russian)

5. Vennidzher M. *Modeli mnogogrannikov* [Models of Polyhedra]. Moscow, Mir Publ.,1974, 236 p. (In Russian)

6. Zalgaller V.A. *Vypuklye mnogogranniki s pravil'nymi granyami* [Convex Polyhedra with Regular Faces]. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* [Records of Scientific Workshops of LOMI]. Moscow-Leningrad, Nauka Publ., 1967, vol. 2, pp. 5—221. (In Russian)

7. Dutch S. Polihedra with Regular Polygon Faces. Available at: http://www.uwgb.edu/DUTCHS/symmetry/johnsonp.htm. Date of access: 18.11.2014.

8. Sutton D. Platonic & Archimedean Solids: the Geometry of Space/Written and Illustrated. New York, Walker & Company, 2002, 64 p.

9. Gurin A.M. K istorii izucheniya vypuklykh mnogogrannikov s pravil'nymi granyami [Background of Study of Convex Polyhedra with Regular Faces]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic News of Mathematics]. 2010, vol. 7, pp. 5—23. (In Russian)

10. Alsina C. *Mir matematiki : v 40 tomakh. Tom 23. Tysyacha graney geometricheskoy krasoty. Mnogogranniki* [The World of Mathematics : in 40 Volumes. Vol. 23. Thousand Faces of Geometrical Beauty. Polyhedrons]. Translated from Spanish]. Moscow, De Agostini Publ., 2014, 144 p. (In Russian)

11. Ivashchenko A.V. Modeli predstavleniya elementov sistemy proektivograficheskikh epyur i algoritm ikh opredeleniya [Representation Models of the System Elements of Project Geometry Diagrams and their Definition Algorithm]. *Molodye golosa: sbornik nauchno-issledovatel'skikh rabot aspirantov i soiskateley* [Young Voices: Collection of Scientific Works of Postgraduate Students and Doctoral Candidates]. Moscow, MGOPU Publ., 2000, no. 2, pp. 12—19. (In Russian)

12. Ivashchenko A.V., Kondrat'eva T.M. Proektivograficheskie chertezhi mnogokomponentnykh sistem mnogogrannikov [Shape Generation by Means of a New Method of Orthographic Representation ("Proektivografiya"): Drawings of Multi-Component Polyhedra]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2012, no. 6, pp. 155—160. (In Russian)

13. Ivashchenko A.V., Kondrat'eva T.M. Proektivograficheskiy analiz mnogogrannikov Dzhonsona [Analysis of Johnson's Polyhedra Using Projective Geometry Techniques]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2013, no. 5, pp. 226—229. (In Russian)

14. Ivashchenko A.V., Kondrat'eva T.M. Avtomatizatsiya polucheniya proektivograficheskikh chertezhey tel Dzhonsona [Automatic Receipt of Projective Geometry Drawings of Johnson Bodies]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 6, pp. 179—183. (In Russian)

15. Ivashchenko A.V., Znamenskaya E.P. Konfiguratsiya Dezarga v arkhitekturnom i dizayn-proektirovanii [Configuration of Desargue in Architectural and Design Engineering]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 9, pp. 154—160. (In Russian)

16. Nikulin E.A. *Komp'yuternaya geometriya i algoritmy mashinnoy grafiki* [Geometry and Algorithms for Computer Graphics]. Saint Petersburg, BKhV-Peterburg Publ., 2003, 560 p. (In Russian)

17. Chetverukhin N.F. *Vysshaya geometriya* [Higher Geometry]. Moscow, Uchpedgiz Publ., 1939, 144 p. (In Russian)

18. Young J.W., Veblen O. Projective Geometry. University of Michigan, 1910, 360 p.

19. Hartshorne R. Foundations of Projective Geometry. Ishi Press, 2009, 190 p.

20. Filin Yu.N., Veselov V.I., Georgievskiy O.V. Innovatsionnoe preobrazovanie formografiki kubicheskikh modeley v svete resheniya problem razvitiya ekologicheski znachimykh form [Innovative Transformation of Form Graphics of Cubic Models in Frames of Solving the Problems of Ecologically Essential Forms Development]. *Innovatsii: perspektivy, problemy, dostizheniya : sbornik trudov Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii (Moskva 27 maya 2013 g.)* [Innovations: Prospects, Problems, Achievements : Collection of Works of International Science and Practice Conference (Moscow, May 27, 2013)]. Moscow, REU im. G.V. Plekhanova Publ., 2013, pp. 277— 282. (In Russian)

21. Kartavtsev I.S., Veselov V.I., Georgievskiy O.V., Filin Yu.N. Arkhikub-izokonstruktor transformatsii formografiki [ArchicubeIsoconstructor of Form Graphics Transformation]. *Ekonomicheski effektivnye i ekologicheski chistye innovatsionnye tekhnologii : sbornik trudov Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Economically Efficient and Environmentally Friendly Innovative Technologies : Collection of Works of International Science and Practice Conference]. Moscow, REU im. G.V. Plekhanova Publ., 2013, pp. 139—143. (In Russian)

About the authors: **Ivashchenko Andrey Viktorovich** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Design, **Capital Academy of Finance and Humanities (SFGA)**, 15 Sharikopodshipnikovskaya str., 109088, Moscow, Russian Federation; ivashchenko_a@inbox.ru;

Kondrat'eva Tat'yana Mikhaylovna — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Chair, Department of Descriptive Geometry and Graphics, **Moscow State University of Civil Engineering (MGSU)**, 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; grafika@mgsu.ru; +7 (499) 183-24-83.

For citation: Ivashchenko A.V., Kondrat'eva T.M. Proektivnye konfiguratsii na proektivograficheskikh chertezhakh [Projective Configurations in Projective Geometrical Drawings]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2015, no. 5, pp. 141—147. (In Russian)