УДК 624.15 + 517

**Е.Н. Курбацкий, Май Дык Минь**
*ФГБОУ ВПО «МИИТ»*

# РАСЧЕТ ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ С ДВУМЯ УПРУГИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ОСНОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СВОЙСТВ ИЗОБРАЖЕНИЙ ФУРЬЕ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ

Представлен метод решения ленточных фундаментов, рассматриваемых как балки конечной длины на основании с двумя упругими характеристиками. Метод основан на свойствах изображений Фурье финитных функций.

**Ключевые слова:** расчет фундаментов, балка, упругое основание, упругие характеристики, изображение Фурье, финитные функции, Винклера упругое основание.

Модели балок на упругом основании представляют теоретический и практический интерес при расчете фундаментов сооружений. При решении задач конструкций на упругом основании используются различные модели. Наиболее часто используемой моделью является балка на упругом винклеровском основании. Упругое основание Винклера представляет собой набор линейных несвязанных между собой пружин, расположенных под балкой. Упругое основание характеризуется одним коэффициентом постели — жесткостью пружин [1, 2]. Этой модели присущи следующие недостатки: не учитывается деформация грунта вне зоны контакта с балкой и, что пружины не работают на растяжение. Первый недостаток можно исключить, если воспользоваться моделью с двумя коэффициентами постели.

Теория фундаментов с использованием моделей с двумя коэффициентами постели изложена российским ученым П.Л. Пастернаком в [3].

Второй недостаток модели балки — учет отрыва балки от основания так же можно исключить, если при решении воспользоваться последовательными приближениями.

В работе представлен метод решения задачи, в котором ленточные фундаменты рассматриваются как изгибаемые балки конечной длины, лежащие на основании с двумя упругими характеристиками. Эта проблема была решена некоторыми авторами, однако воздействие грунта на обеих сторонах фундаментной балки не учитывается [4—9].

При решении используются обобщенные функции и свойства изображений Фурье финитных функций [10].

*Дифференциальное уравнение изгиба балки конечной длины*

Рассмотрим ленточный фундамент в виде балки конечной длины $l$ с изгибной жесткостью $EI$, лежащей на основании, свойства которого описываются моделью с двумя упругими характеристиками $k_1$ и $k_2$. Первый коэффициент постели $k_1$ — коэффициент сжатия, который ничем не отличается от обычного коэффициента постели по теории Винклера. Второй коэффициент постели $k_2$ — коэффициент сдвига, позволяющий выразить интенсивность вертикальной силы сдвига $Q$ в виде произведения коэффициента $k_2$ на производную функции осадки $Q = k_2 \frac{du}{dx}$. Эти силы сдвига появляются и в сыпучих и малосвязных грунтах вследствие зацепления и внутреннего трения между частицами грунта. Схема расчета приведена на рис. 1.

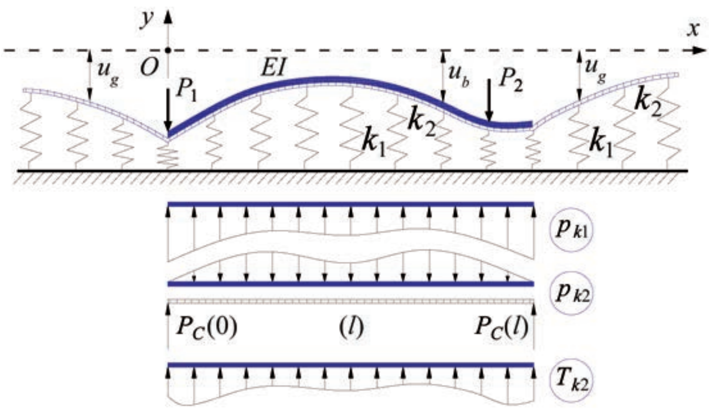


Рис. 1. Деформация балки и участка упругого основания при полном контакте ($u(x) = u_b(x)$)

Двухпараметрическое основание можно рассматривать как близко расположенные линейные пружины жесткости $k_1$, которые связаны друг с другом мембраной, имеющей поверхностное натяжение $k_2$ [4—7]. Реакция основания состоит из двух частей. Первая из них связана с перемещением непосредственно, т.е. вертикальной реакцией линейных пружин. Вторая часть пропорциональна второй производной от перемещения поверхности, т.е. равна вертикальной составляющей поверхностного натяжения.

На рис. 1 показана реакция основания, состоящая из двух частей: $p_{k1}$ и $p_{k1}$. Первая из них $p_{k1}$ связана с первым коэффициентом основания $k_1$ и является вертикальной линейной реакцией упругого отпора основания. Вторая — $p_{k2}$ — соответствует вертикальным реакциям отпора основания, определяемым вторым коэффициентом основания $k_2$.

Предполагая наличие полного контакта по всей длине между балкой и основанием, представим перемещения основания на трех участках. Первый участок соответствует перемещениям основания под балкой, два остальных участка вне балки соответствуют ненагруженному основанию, на которое не оказывается давления. На границах участков приложены сосредоточенные силы $P_C(0)$ и $P_C(l)$, вызванные вертикальными реакциями отпора ненагруженных участков основания (вне балки).

*1. Взаимодействие балки и участка упругого основания при полном контакте* ($u(x) = u_b(x)$). Предположим, что балка загружена сосредоточенной силой, приложенной в точке $x = a$ (рис. 2).

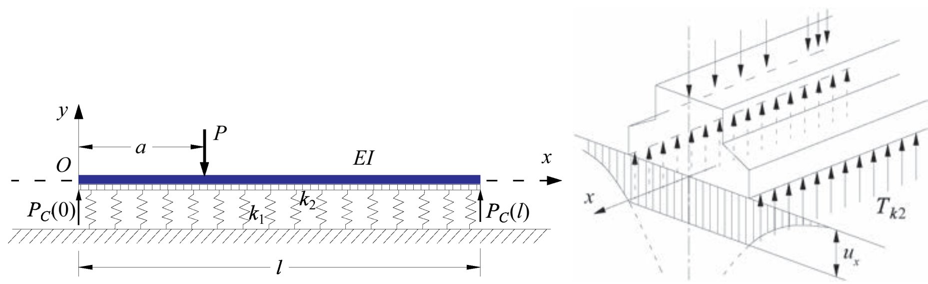


Рис. 2. Расчетная схема первого участка

Дифференциальное уравнение, описывающее изгиб балки, лежащей на основании, свойства которого описываются моделью с двумя упругими характеристиками [3]:

$$EI\frac{d^4u}{dx^4}-K_2\frac{d^2u}{dx^2}+K_1\alpha u=q(x), \tag{1}$$

где $K_1=bk_1$; $K_2=bk_2$; $b$ — ширина балки; $k_1,k_2$ — коэффициенты основания; $\alpha=1+\frac{1}{b}\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$ — коэффициент, учитывающий приближенно пространственную работу грунта (в направлении перпендикулярном оси балки).

Представим дифференциальное уравнение в финитных обобщенных функциях [10, 11]. Для этой цели запишем функцию прогиба в виде произведения

$$U(x)=u(x)\left[\theta(x)-\theta(x-l)\right], \tag{2}$$

где выражение $\left[\theta(x)-\theta(x-l)\right]$ представляет собой разность функций Хевисайда.

Отметим, что производной функции Хэвисайда является дельта-функция Дирака:

$$\frac{d}{dx}\theta(x-l)=\delta(x-l). \tag{3}$$

Из уравнения (1) получим:

$$\begin{aligned}EI\frac{d^4U}{dx^4}-K_2\frac{d^2U}{dx^2}+K_1\alpha U&=q(x)\left[\theta(x)-\theta(x-l)\right]+EIu(0)\delta'''(x)-EIu(l)\delta'''(x-l)+\\&+EIu'(0)\delta''(x)-EIu'(l)\delta''(x-l)+\\&+\left[M(0)-K_2u(0)\right]\delta'(x)-\left[M(l)-K_2u(l)\right]\delta'(x-l)+\\&+\left[Q(0)-K_2u'(0)\right]\delta(x)-\left[Q(l)-K_2u'(l)\right]\delta(x-l).\end{aligned} \tag{4}$$

Отметим, что функция $q(x)\left[\theta(x)-\theta(x-l)\right]$ является также финитной, так как она определяет нагрузку на конечной части балки. В правой части уравнения (4) содержится вся информация о воздействии на балку: нагрузка и граничные условия. Обозначим правую часть уравнения $Q(x)$, которую будем называть обобщенной нагрузкой. Разделив левую и правую части уравнения на $EI$ и применив преобразование Фурье к обеим частям уравнения, получим

$$\tilde{U}(\nu)\left[\nu^4+4\beta_2^2\nu^2+4\alpha\beta_1^4\right]=\frac{1}{EI}\tilde{Q}(\nu), \tag{5}$$

где $\tilde{U}(\nu)$ — изображение Фурье функции $U(x)$; $\tilde{Q}(\nu)$ — изображение Фурье обобщенной нагрузки $Q(x)$; $\nu$ — параметр преобразования Фурье;

$$4\beta_2^2 = \frac{K_2}{EI};\ 4\beta_1^4 = \frac{K_1}{EI}.$$

При определении изображения Фурье обобщенной нагрузки используются следующие свойства обобщенных функций:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x-l)dx = (-1)^n f^{(n)}(l). \quad (6)$$

Изображение Фурье обобщенной нагрузки (в рассматриваемой задаче):

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(x) = {} & Pe^{i\nu a} - P_C(0) - P_C(l)e^{i\nu l} + EIu(0)(-i\nu)^3 - EIu(l)(-i\nu)^3 e^{i\nu l} + EIu'(0)(i\nu)^2 - \\ & - EIu'(l)(i\nu)^2 e^{i\nu l} + \left[M(0) - K_2 u(0)\right](-i\nu) - \left[M(l) - K_2 u(l)\right](-i\nu)e^{i\nu l} + \\ & + \left[Q(0) - K_2 u'(0)\right] - \left[Q(l) - K_2 u'(l)\right]e^{i\nu l}.\end{aligned} \quad (7)$$

Для конечной свободно лежащей балки моменты и поперечные силы в концевых сечениях равны нулю, поэтому выражение (7) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(x) = {} & Pe^{i\nu a} - P_C(0) - P_C(l)e^{i\nu l} + \left[EI(-i\nu)^3 + K_2(i\nu)\right]u(0) + \left[EI(i\nu)^2 - K_2\right]u'(0) + \\ & + \left[-EI(-i\nu)^3 + K_2(-i\nu)\right]e^{i\nu l}u(l) + \left[-EI(i\nu)^2 + K_2\right]e^{i\nu l}u'(l).\end{aligned} \quad (8)$$

Для определения неизвестных параметров на концах балки можно воспользоваться теоремой Винера — Пэли — Шварца, так как функция прогиба балки конечной длины является финитной функцией. Изображение Фурье функции прогиба балки конечной длины имеет вид

$$\tilde{U}(\nu) = \frac{\frac{1}{EI}\tilde{Q}(\nu)}{\nu^4 + 4\beta_2^2\nu^2 + 4\alpha\beta_1^4}. \quad (9)$$

В соответствии с теоремой Винера — Пэли — Шварца функция $\tilde{U}(\nu)$ должна быть целой, вследствие этого числитель, представляющий собой сумму целых функций, должен содержать в себе нули знаменателя. Поэтому должны выполняться четыре условия:

$$\tilde{Q}(\nu_j) = 0,\quad j = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \quad (10)$$

где $\nu_j$ — корни выражения $\nu^4 + 4\beta_2^2\nu^2 + 4\alpha\beta_1^4 = 0$.

В большинстве встречающихся в практике случаев выполняется соотношение: $\beta_2 < \beta_1$ [3, 7, 8] $\Rightarrow \beta_2 < \alpha\beta_1$. Выражения для корней знаменателя представим в виде

$$\begin{aligned}&\nu_1 = \beta_1\sqrt[4]{4\alpha}\left[\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]; \qquad \nu_2 = \beta_1\sqrt[4]{4\alpha}\left[-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right];\\ &\nu_3 = \beta_1\sqrt[4]{4\alpha}\left[-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - i\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]; \qquad \nu_4 = \beta_1\sqrt[4]{4\alpha}\left[\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - i\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right],\end{aligned} \quad (11)$$

где $\varphi = \arccos\left(\frac{\beta_2^2}{\beta_1^2\sqrt{\alpha}}\right)$ $(\Rightarrow 0 \le \varphi \le \pi/2)$ (рис. 3).

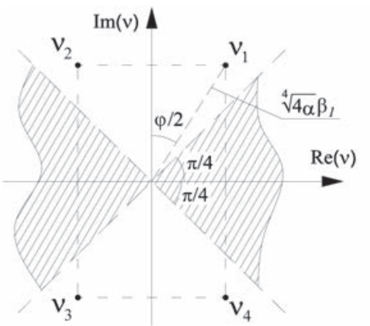


Рис. 3. Расположение корней знаменателя на комплексной плоскости

Используя выражения (8) и (10), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} i\nu_1^3+i\nu_1 4\beta_2^2 & -\nu_1^2-4\beta_2^2 & -\left(i\nu_1^3+i\nu_1 4\beta_2^2\right)e^{i\nu_1 l} & \left(\nu_1^2+4\beta_2^2\right)e^{i\nu_1 l} & \dfrac{-1}{EI} & \dfrac{-e^{i\nu_1 l}}{EI} \\ i\nu_2^3+i\nu_2 4\beta_2^2 & -\nu_2^2-4\beta_2^2 & -\left(i\nu_2^3+i\nu_2 4\beta_2^2\right)e^{i\nu_2 l} & \left(\nu_2^2+4\beta_2^2\right)e^{i\nu_2 l} & \dfrac{-1}{EI} & \dfrac{-e^{i\nu_2 l}}{EI} \\ i\nu_3^3+i\nu_3 4\beta_2^2 & -\nu_3^2-4\beta_2^2 & -\left(i\nu_3^3+i\nu_3 4\beta_2^2\right)e^{i\nu_3 l} & \left(\nu_3^2+4\beta_2^2\right)e^{i\nu_3 l} & \dfrac{-1}{EI} & \dfrac{-e^{i\nu_3 l}}{EI} \\ i\nu_4^3+i\nu_4 4\beta_2^2 & -\nu_4^2-4\beta_2^2 & -\left(i\nu_4^3+i\nu_4 4\beta_2^2\right)e^{i\nu_4 l} & \left(\nu_4^2+4\beta_2^2\right)e^{i\nu_4 l} & \dfrac{-1}{EI} & \dfrac{-e^{i\nu_4 l}}{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ u'(0) \\ u(l) \\ u'(l) \\ P_C(0) \\ P_C(l) \end{Bmatrix} = \frac{-P}{EI} \begin{Bmatrix} e^{i\nu_1 a} \\ e^{i\nu_2 a} \\ e^{i\nu_3 a} \\ e^{i\nu_4 a} \end{Bmatrix}. \quad (12)$$

Система четырех уравнений содержит шесть неизвестных. Для определения двух неизвестных используются решения для соседних незагруженных участков основания.

*2. Деформации незагруженных участков основания*

На границах между участками существуют поперечные силы $P_C(0)$ и $P_C(l)$. Силы сдвига на левых и правых границах участков зависят от изменений уклонов поверхности грунта, описываются в виде [3] (рис. 4)

$$t_{2,3} = k_2 \frac{du_b}{dx}; \quad t_{1,4} = k_2 \frac{du_g}{dx}. \quad (13)$$

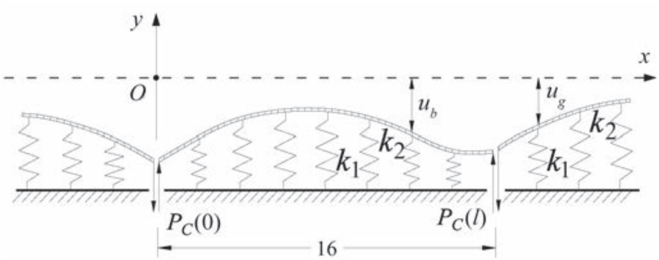


Рис. 4. Схема расчета первого участка

Поэтому поперечные силы $P_C(0)$ и $P_C(l)$ определены следующими выражениями [3, 12]:

$$\begin{cases} P_C(0) = K_2\left[u_b'(0) - u_g'(0)\right]; \\ P_C(l) = K_2\left[u_g'(l) - u_b'(l)\right], \end{cases} \quad (14)$$

где $u_b'(0)$ и $u_b'(l)$ — уклоны поверхностей участков грунта, залегающих под балки, на границах балки; $u_g'(0)$ и $u_g'(l)$ — уклоны поверхностей свободных участков грунта на границах балки.

Дифференциальное уравнение перемещения свободной поверхности основания вне границы балки можно представить в виде [3, 12]

$$K_2 \frac{d^2 u_g}{dx^2} - K_1 u_g = 0. \quad (15)$$

Применив преобразование Фурье к обеим частям уравнения (15), получим

$$\left(-K_2 \nu^2 - K_1\right)\tilde{u}_g = 0; \quad (16)$$

$$\tilde{u}_g(\nu) = 0 \text{ при } \nu \neq \nu_1 \text{ и } \nu \neq \nu_2, \text{ где } \nu_{1,2} = \pm i\sqrt{K_1/K_2}; \quad (17)$$

имеем: $\tilde{u}_g(\nu) = A\delta(\nu - \nu_1) + B\delta(\nu - \nu_2),$ (18)

где $A$, $B$ — коэффициенты, зависящие от условий на границах.

Выполнив обратное преобразование Фурье выражения (18), получим

$$u_g(x) = Ae^{-i\nu_1 x} + Be^{-i\nu_2 x}, \quad (19)$$

или $u_g(x) = Ae^{\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}x}.$ (20)

Учитываем условия на границах: $u_g(x=0) = u_b(0)$ и $u_g(x \to -\infty) = 0$ или $u_g(x=l) = u_b(l)$ и $u_g(x \to \infty) = 0$, получим функции прогиба поверхностей грунта вне балки:

$$\begin{cases} u_{g1}(x) = u_b(0)e^{\sqrt{K_1/K_2}x} & (x < 0); \\ u_{g2}(x) = u_b(l)e^{-\sqrt{K_1/K_2}(x-l)} & (x > l). \end{cases} \quad (21)$$

Продифференцировав выражение (21), и подставив результаты дифференцирования в выражение (14), получим:

$$\begin{cases} \sqrt{K_1K_2}u_b(0) - K_2 u_b'(0) + P_C(0) = 0; \\ \sqrt{K_1K_2}u_b(l) + K_2 u_b'(l) + P_C(l) = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Выражения (12) и (22) представляют систему шести уравнений с шестью неизвестными:

$$\begin{bmatrix} i\nu_1^3 + i\nu_1 4\beta_2^2 & -\nu_1^2 - 4\beta_2^2 & -\left(i\nu_1^3 + i\nu_1 4\beta_2^2\right)e^{i\nu_1 l} & \left(\nu_1^2 + 4\beta_2^2\right)e^{i\nu_1 l} & \frac{-1}{EI} & \frac{-e^{i\nu_1 l}}{EI} \\ i\nu_2^3 + i\nu_2 4\beta_2^2 & -\nu_2^2 - 4\beta_2^2 & -\left(i\nu_2^3 + i\nu_2 4\beta_2^2\right)e^{i\nu_2 l} & \left(\nu_2^2 + 4\beta_2^2\right)e^{i\nu_2 l} & \frac{-1}{EI} & \frac{-e^{i\nu_2 l}}{EI} \\ i\nu_3^3 + i\nu_3 4\beta_2^2 & -\nu_3^2 - 4\beta_2^2 & -\left(i\nu_3^3 + i\nu_3 4\beta_2^2\right)e^{i\nu_3 l} & \left(\nu_3^2 + 4\beta_2^2\right)e^{i\nu_3 l} & \frac{-1}{EI} & \frac{-e^{i\nu_3 l}}{EI} \\ i\nu_4^3 + i\nu_4 4\beta_2^2 & -\nu_4^2 - 4\beta_2^2 & -\left(i\nu_4^3 + i\nu_4 4\beta_2^2\right)e^{i\nu_4 l} & \left(\nu_4^2 + 4\beta_2^2\right)e^{i\nu_4 l} & \frac{-1}{EI} & \frac{-e^{i\nu_4 l}}{EI} \\ \sqrt{K_1K_2} & -K_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{K_1K_2} & K_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b(0) \\ u_b'(0) \\ u_b(l) \\ u_b'(l) \\ P_C(0) \\ P_C(l) \end{Bmatrix} = \frac{-P}{EI} \begin{Bmatrix} e^{i\nu_1 a} \\ e^{i\nu_2 a} \\ e^{i\nu_3 a} \\ e^{i\nu_4 a} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (23)$$

Решения системы уравнений (23) определяют неизвестные значения на границах в выражениях (9) и (21). Для определения функции прогиба балки необходимо выполнить обратное преобразование Фурье

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{EI}\tilde{Q}(\nu)}{\nu^4 + 4\beta_2^2 \nu^2 + 4\alpha\beta_1^4} e^{-i\nu x} d\nu. \quad (24)$$

Для вычисления интеграла (24) используется теория вычетов.

*3. Пример*

В качестве исходных данных для примера расчета воспользуемся исходными данными из [2]. Бетонная балка длиной $l$ = 16, шириной $b$ = 1 и высотой $h$ = 1,2 м нагружена равными сосредоточенными силами $P_1$ = 1000 т и $P_2$ = 1500 т, соответственно расположенными на расстояниях $x_1$ = 0 и $x_2$ = 14 м от начала балки (рис. 5). Коэффициент жесткости основания $k_1$ = 2000 т/м³.

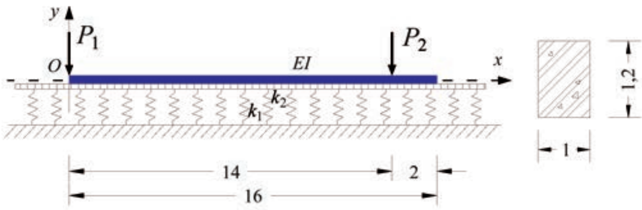


Рис. 5. Расчетная схема для определения перемещений и внутренних усилий в балке и реакций основания

Приведены примеры при различных отношениях $s = \beta_2/\beta_1$

В первом примере: $s = \beta_2/\beta_1 = 0,5$. В последующих: $s = 0,1...0,9$.

На рис. 6 приведены графики перемещений и внутренних усилий в сечениях двух моделей: модели с использованием двух коэффициентов постели и модели с одним коэффициентом постели. Следует отметить существенное отличие.

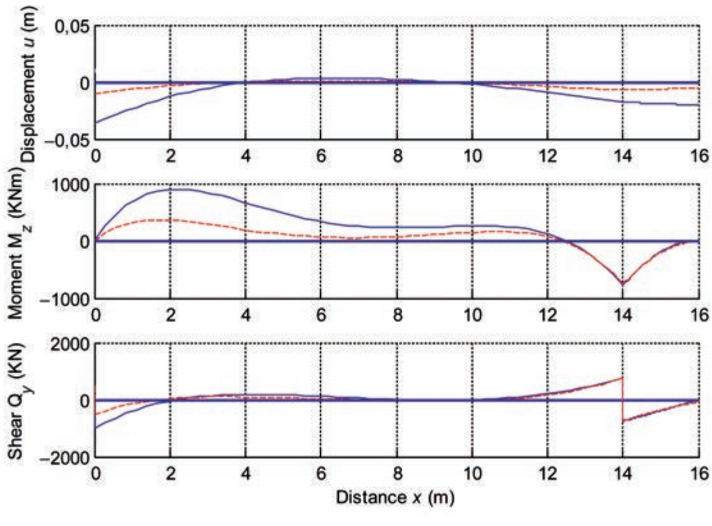


Рис. 6. Эпюры перемещений и усилий балки ($s$ = 0,5): — — для балки при расчете с использованием двух коэффициентов постели; —— эпюры при расчете с использованием одного коэффициента постели

Реакции основания для каждой компоненты показаны на рис. 7. $P_{k_1}$, $P_{k_2}$ — реакции основания под балкой, соответствующие коэффициентам $k_1$ и $k_2$; $T_{k2}$ — реакция в соответствии с вертикальными силами сдвига грунта на обеих сторонах балки (см. рис. 2).

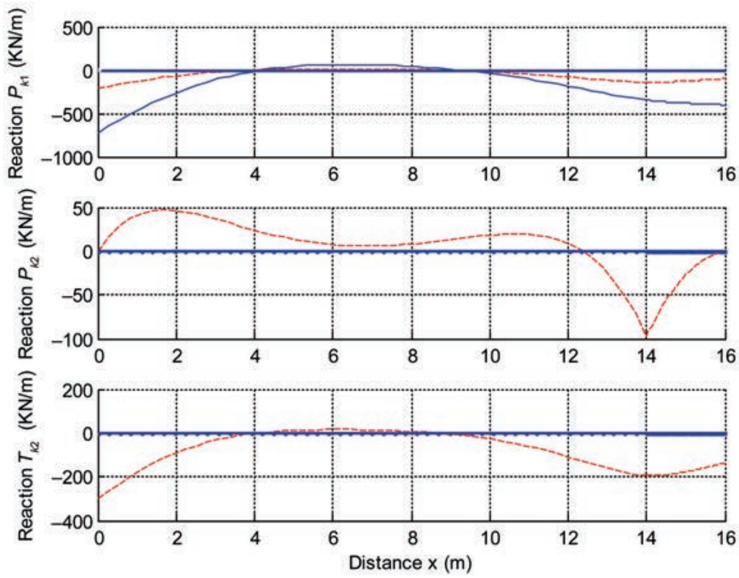


Рис. 7. Эпюры реакций отпора основания ($s$ = 0,5): — — для балки при расчете с использованием двух коэффициентов постели; —— эпюры при расчете с использованием одного коэффициента постели

На рис. 8 приведены графики реакции основания при различных отношениях $s = \beta_2/\beta_1$.

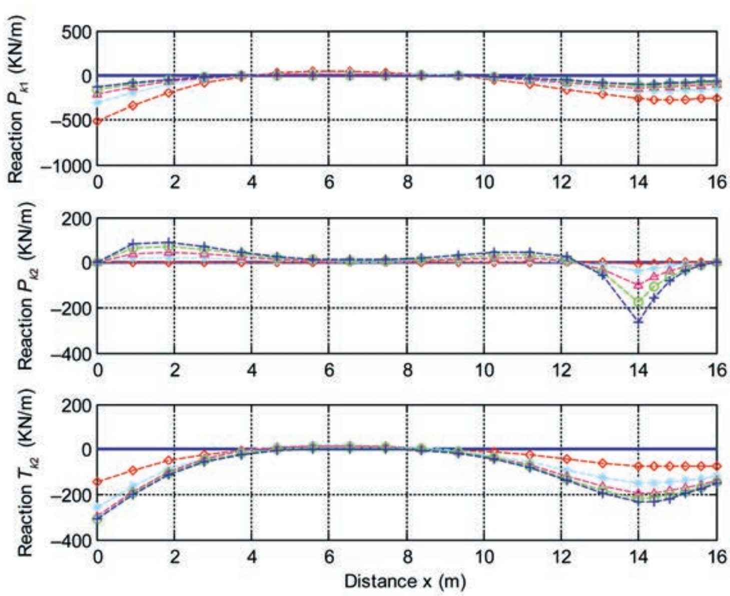


Рис. 8. Эпюры реакций отпора основания с разными отношениями $s = \beta_2 / \beta_1$

В модели основания коэффициент жесткости сдвига $k_2$ представляет натяжение мембраны. Когда жесткость мембраны $k_2$ уменьшается, влияние коэффициента $k_1$ становится более заметным. В таком случае линия прогиба основания с двумя упругими характеристиками напоминает модель Винклера и на границах балки возникают разрывы поверхности оснований (рис. 9). В том случае, когда коэффициент $k_2$ принимает большие значения, влияние функция прогиба мембраны основания становится значительным и его взаимодействие с системой пружин становится ясно выраженным. Это проявляется в виде плавных изменений перемещений поверхности грунта вне балки.

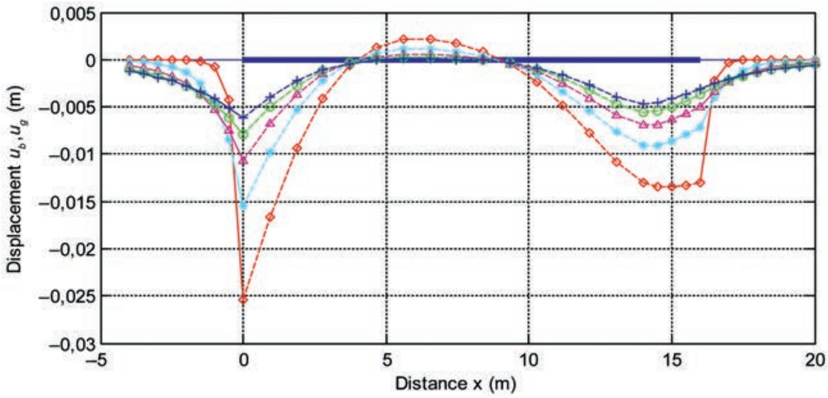


Рис. 9. Эпюры перемещений балки и поверхности грунта с разными отношениями $s = \beta_2 / \beta_1$

*Вывод.* Представлен анализ решения балки, лежащей на основании, свойства которого описываются моделью с двумя упругими характеристиками. Особое внимание уделено проблеме, учитывающей деформации участков грунта вне балки.

**Библиографический список**

1. *Коренев Б.Г.* Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М. : Госстройиздат, 1954. 231 с.

2. *Горбунов-Посадов М.И, Маликова Т.А.* Расчет конструкций на упругом основании. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Стройиздат, 1973. 627 с.

3. *Пастернак П.Л.* Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. М., 1954. 55 с.

4. *Celep Z., Demir F.* Symmetrically loaded beam on a two-parameter tensionless foundation. Structural Engineering and Mechanics. 2007, vol. 27, no. 5, pp. 555—574.

5. *Eisenberger M., Bielak J.* Finite beams on infinite two-parameter elastic foundations. Computers & Structures. 1992, vol. 42, no. 4, pp. 661—664.

6. *Sapountzakis E.J., Kampitsis A.E.* Inelastic analysis of beams on two-parameter tensionless elastoplastic foundation. Engineering Structures. 2013, no. 48, pp. 389—401.

7. *Ma X., Butterworth J.W., Clifton G.C.* Static analysis of an infinite beam resting on a tensionless Pasternak foundation. European Journal of Mechanics—A/Solids. 2009, vol. 28, no. 4, pp. 697—703.

8. *Razaqpur A., Shah K.* Exact analysis of beams on two-parameter elastic foundations. International Journal of Solids and Structures. 1991, vol. 27, no. 4, pp. 435—454.

9. *Morfidis K., Avramidis I.E.* Formulation of a generalized beam element on a two-parameter elastic foundation with semi-rigid connections and rigid offsets. Computers & Structures. 2002, vol. 80, no. 25, pp. 1919—1934.

10. *Курбацкий Е.Н.* Метод решения задач строительной механики и теории упругости, основанный на свойствах изображений Фурье финитных функций : дисс. … д-ра техн. наук. М. : МИИТ, 1995. 205 с.

11. *Май Дык Минь.* Расчет тоннелей, расположенных в упругопластических грунтах, пересекающих зоны разлома, на сейсмические воздействия // Строительство и реконструкция. 2013. № 1 (45). С. 19—25.

12. *Клепиков С.Н.* Расчет конструкций на упругом основании. М. : Киев, 1967. 185 с.

*Поступила в редакцию в сентябре 2013 г.*

Об авторах: **Курбацкий Евгений Николаевич** — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой подземных сооружений, **Московский государственный университет путей сообщения (ФГБОУ ВПО «МИИТ»)**, 127994, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9, (499) 978-40-75, usd.miit@gmail.com;

**Май Дык Минь** — аспирант кафедры подземных сооружений, **Московский государственный университет путей сообщения (ФГБОУ ВПО «МИИТ»)**, 127994, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9, maiducminh_hn@yahoo.com.vn.

Для цитирования: *Курбацкий Е.Н., Май Дык Минь.* Расчет фундаментов зданий и сооружений с двумя упругими характеристиками основания с использованием свойств изображений Фурье финитных функций // Вестник МГСУ. 2014. № 1. С. 41—51.

**E.N. Kurbatskiy, Mai Duc Minh**

## FOUNDATION CALCULATION FOR BUILDINGS AND STRUCTURES WITH TWO ELASTIC CHARACTERISTICS OF THE FOUNDATION USING FEATURES OF FOURIER TRANSFORMS FOR FINITE FUNCTIONS

The problem of a beam resting on elastic foundation often occurs in the analysis of building, geotechnical, highway, and railroad structures. Its solution demands modeling of the mechanical behavior of the beam, the mechanical behavior of the soil as elastic subgrade and the form of interaction between the beam and the soil. The oldest, most famous and most frequently used mechanical model is the one devised by Winkler (1867), in which the beam-supporting soil is modeled as a series of closely spaced, mutually independent, linear elastic vertical springs, which, evidently, provide resistance in direct proportion to the deflection of the beam.

The solution is presented for the problem of an Euler–Bernoulli beam supported by an infinite two-parameter Pasternak foundation. The beam is subjected to arbitrarily distributed or concentrated vertical loading along its length. Static response of a beam on an elastic foundation characterized by two parameters is investigated assuming, that the beam is subjected to external loads and two concentrated edge load. The governing equations of the problem are obtained and solved by pointing out that there is a concentrated edge foundation reaction in addition to a continuous foundation reaction along the beam axis in the case of complete contact in the foundation reactions of the two-parameter foundation model. The proposed method is based on the properties of Fourier transforms of the finite functions. Particular attention is paid to the problem, taking into account the deformation of soil areas outside the beam. The beam model with two foundation coefficients more realistically describes the behavior of strip footings under loading.

**Key words:** foundation calculation, beam, elastic foundation, elastic features, Fourier transform, finite function, Winkler elastic foundation.

### References

1. Korenev B.G. *Voprosy rascheta balok i plit na uprugom osnovanii* [Problems of Calculating Beams and Slabs on Elastic Foundation]. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1954, 231 p.

2. Gorbunov-Posadov M.I, Malikova T.A. *Raschet konstruktsiy na uprugom osnovanii* [Calculation of Structures on Elastic Foundation]. 2-nd edition. Moscow, Stroyizdat Publ., 1973, 627 p.

3. Pasternak P.L. *Osnovy novogo metoda rascheta fundamentov na uprugom osnovanii pri pomoshchi dvukh koeffitsientov posteli* [Fundamentals of a New Method of Elastic Foundation Analysis by Means of Two-constants]. Moscow, 1954, 55 p.

4. Celep Z., Demir F. Symmetrically Loaded Beam on a Two-parameter Tensionless Foundation. Structural Engineering and Mechanics. 2007, vol. 27, no. 5, pp. 555—574.

5. Eisenberger M., Bielak J. Finite Beams on Infinite Two-parameter Elastic Foundations. Computers & Structures. 1992, vol. 42, no. 4, pp. 661—664.

6. Sapountzakis E.J., Kampitsis A.E. Inelastic Analysis of Beams on Two Parameter Tensionless Elastoplastic Foundation. Engineering Structures. 2013, no. 48, pp. 389—401.

7. Ma X., Butterworth J.W., Clifton G.C. Static Analysis of an Infinite Beam Resting on a Tensionless Pasternak Foundation. European Journal of Mechanics — A/Solids. 2009, vol. 28, no. 4, pp. 697—703.

8. Razaqpur A., Shah K. Exact Analysis of Beams on Two-parameter Elastic Foundations. International Journal of Solids and Structures. 1991, vol. 27, no. 4, pp. 435—454.

9. Morfidis K., Avramidis I.E. Formulation of a Generalized Beam Element on a Two-parameter Elastic Foundation with Semi-rigid Connections and Rigid Offsets. Computers & Structures. 2002, vol. 80, no. 25, pp. 1919—1934.

10. Kurbatskiy E.N. *Metod resheniya zadach stroitel'noy mekhaniki i teorii uprugosti, osnovannyy na svoystvakh izobrazheniy Fur'e finitnykh funktsiy* [Solution Method for the Tasks of Construction Mechanics and the Elasticity Theory Based on the Properties of Fourier Transform for Finite Functions]. Dissertatsiya na soiskanie uchenoy stepeni doktora tekhnicheskikh nauk [Doctoral Thesis in Engineering Sciences]. Moscow, MIIT Publ., 1995, 205 p.

11. Mai Duc Minh. Raschet tonneley, raspolozhennykh v uprugoplasticheskikh gruntakh, peresekayushchikh zony razloma, na seysmicheskie vozdeystviya [Seismic Design for the Tunnels Located on Elasto-plastic Soils Across Fault Zones]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya* [Construction and Reconstruction]. 2013, no. 1 (45), pp.19—25.

12. Klepikov S.N. *Raschet konstruktsiy na uprugom osnovanii* [Calculation of Structures on Elastic Foundation]. Moscow, Kiev Publ., 1967, 185 p.

About the authors: **Kurbatskiy Evgeniy Nikolaevich** — Doctor of Technical Sciences, Professor, head, Department of Underground Structures, **Moscow State University of Railway Engineering (MIIT)**, 9-9 Obraztsova st., Moscow, 127994, Russian Federation; +7 (499) 978-40-75, usd.miit@gmail.com;

**Mai Duc Minh** — postgraduate student, Department of Underground Structures, **Moscow State University of Railway Engineering (MIIT)**, 9-9 Obraztsova st., Moscow, 127994, Russian Federation; maiducminh_hn@yahoo.com.vn.

For citation: Kurbatskiy E.N., Mai Duc Minh. Raschet fundamentov zdaniy i sooruzheniy s dvumya uprugimi kharakteristikami osnovaniya s ispol'zovaniem svoystv izobrazheniy Fur'e finitnykh funktsiy [Foundation Calculation for Buildings and Structures with Two Elastic Characteristics of the Foundation Using Features of Fourier Transforms for Finite Functions]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 1, pp. 41—51.