УДК 624.075.22

А.Я. Лахов
ФГБОУ ВПО «ННГАСУ»

ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ РАСТЯГИВАЮЩИХ НАПРЯЖЕНИЙ В СТЕРЖНЯХ ДВУХКОНТУРНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КУПОЛОВ СИСТЕМЫ «Р» ОТ ВОЗДЕЙСТВИЯ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

Основываясь на результатах численных решений в среде Patran/Nastran задачи определения напряженно-деформированного состояния геодезических двухконтурных куполов (оболочек) системы «Р» (по классификации профессора Г.Н. Павлова), строятся эмпирические формулы для вычисления глобального максимума напряжений во втором контуре от воздействия собственного веса.

Ключевые слова: аналитическое исследование, численное моделирование, расчет, напряженно-деформированное состояние, приближенные формулы, растягивающие напряжения, геодезические куполы.

В строительных проектных организациях широко используются программные комплексы ArchiCAD, AutoCAD, ALPLAN, Компас, получившие эффективные программные расширения. Одной из таких программных разработок является построенная на платформе ArchiCAD автоматизированная система проектирования геодезических куполов [1, 2].

К геодезическим куполам принято относить оболочки, строящиеся на основе системы геодезических линий, разбивающих поверхность сферы на многогранники различными способами [3, 4]. Двухконтурные геодезические оболочки состоят из набора примыкающих друг к другу пирамид (первый контур), соединенных между собой стержнями, условно образующие второй контур. Методы геометрического построения таких геодезических куполов получили развитие в работах Г.Н. Павлова [1].

Расчет на прочность геодезических куполов и оболочек можно вести следующими методами:

1) приближенный расчет, основанный на применении аналитического решения для гладкой сферической оболочки. Однако этот подход является грубым приближением, так как геодезические оболочки имеют переломы поверхности [5];

2) численный расчет на универсальных программах прочностного расчета, например Patran/Nastran. Этот подход дает численный результат, требующий громоздких вычислений, связанных с трудоемким процессом разбивки оболочки на элементы и больших ресурсов вычислительной техники [6—9];

3) численный расчет на специализированных компьютерных программах, ориентированных на определение напряженно-деформированного состояния геодезических оболочек, например CADRE PRO фирмы CADRE Analitic [10, 11]. Однако данная программа обеспечивает разбивку только одного клас-

© Лахов А.Я., 2013

са геодезических одноконтурных куполов (система «И» по классификации Г.Н. Павлова).

В настоящей работе рассматривается новый подход к данной проблеме, предусматривающий построение простых эмпирических формул, которые могут быть использованы для получения оценки максимальных напряжений во втором контуре геодезической оболочки от воздействия собственного веса. Второй контур образован системой стержней, соединяющих вершины пирамид (рис. 1).

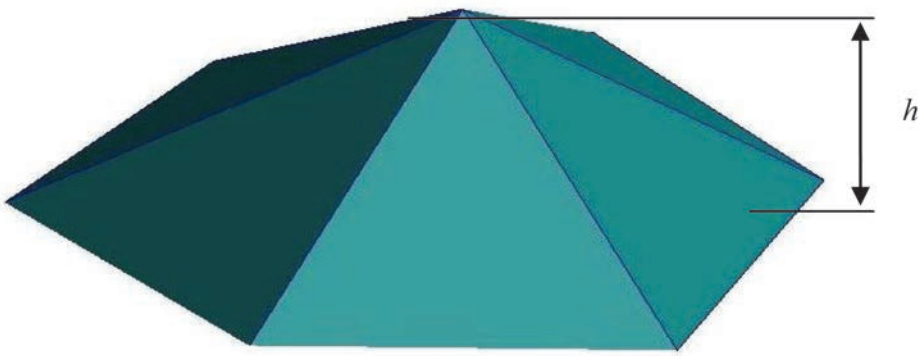


Рис. 1. Пирамида 1 контура

Для построения эмпирических формул первоначально рассмотрим известное [5] аналитическое решение для сферической оболочки от собственного веса. При этом можно вычислить меридиональное

$$N_1 = \frac{Pr}{1+z} \tag{1}$$

и кольцевое

$$N_2 = -Pr\left(z - \frac{1}{1+z}\right) \tag{2}$$

усилия, где $P = \rho\delta g$ — нагрузка от собственного веса, н/м^2; ρ — плотность конструкционного материала кг/м^3; g — ускорение свободного падения, 9,81 м/с^2; r — радиус сферы, м; δ — толщина оболочки, м; $z = \cos\varphi$; φ — центральный угол, соответствующий точке на сфере, отсчитываемый от вертикали.

При этом, используя (1) и (2), можно вычислить эквивалентное напряжение по Мизесу $\sigma_{экв}$ в любой точке сферического купола от собственного веса

$$\sigma_{экв} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x^2\right]^{\frac{1}{2}} = \lambda\frac{\sqrt{z^2\left(1+z\right)^2 - 3z\left(1+z\right)+3}}{1+z}, \tag{3}$$

где $\lambda = \frac{Pr}{\delta}$.

Используя (3), можно определить максимальное $\sigma^0_{экв}$ эквивалентное напряжение для полусферического купола при λ = const на нижней кромке основания:

$$\sigma^{0}_{\text{экв}} = 1,732\rho g r. \quad (4)$$

Опираясь на результат (4), можно ввести приближенные оценки максимального растягивающего напряжения $\sigma_{\max}$ от осевого усилия и изгибающего момента в стержнях второго контура геодезической оболочки со сплошным круглым сечением с помощью следующей эмпирической формулы

$$\sigma_{\max} = 1,732b\rho g r + \frac{1,732a\rho g l^2 (1 - \alpha h)}{c + ed}, \quad (5)$$

где a, b, c, м, e, α, 1/м — эмпирические параметры; l — максимальная величина длины стержня из всех составляющих второй контур элементов, м; d — диаметр стержня, м; h — высота пирамиды, м (см. рис. 1).

Параметры a, b, c, e найдем путем минимизации суммы квадратичных отклонений $\sigma^{\max}_{\text{comb}}$ от результатов численных расчетов $\sigma^{\text{числ}}_{\text{comb}}$, вычисленных на программном комплексе Patran/Nastran

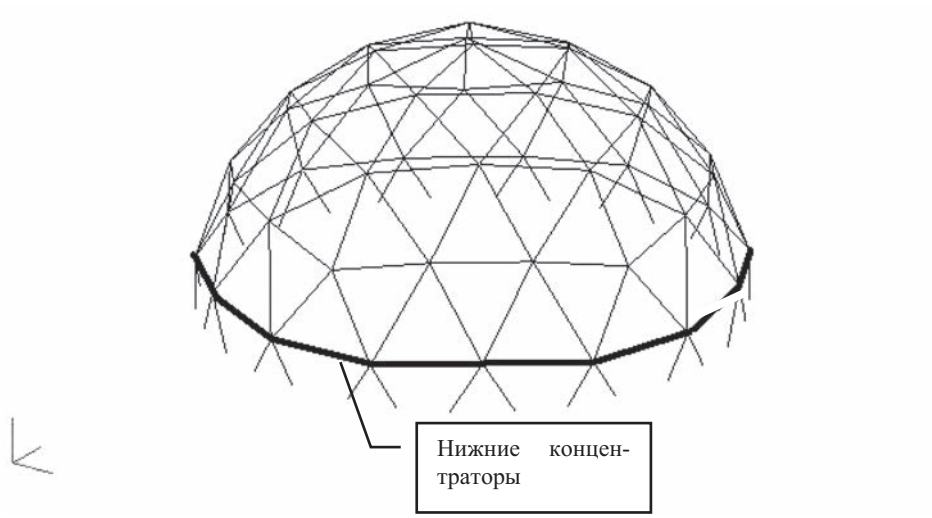
$$Sum = \sum_{1}^{n} \left(\sigma^{\max}_{\text{comb}} - \sigma^{\text{числ}}_{\text{comb}} \right)^2 \to \min. \quad (6)$$

В настоящей работе найдем параметры a, b, c, e для полусферических оболочек системы «Р». Специальная геодезическая разбивка двухконтурных геодезических куполов системы «Р» собирается из минимального числа типов шестигранных и пятигранных пирамид. Некоторые варианты разбивки системы «Р» использовались при проектировании куполов Б. Фуллером.

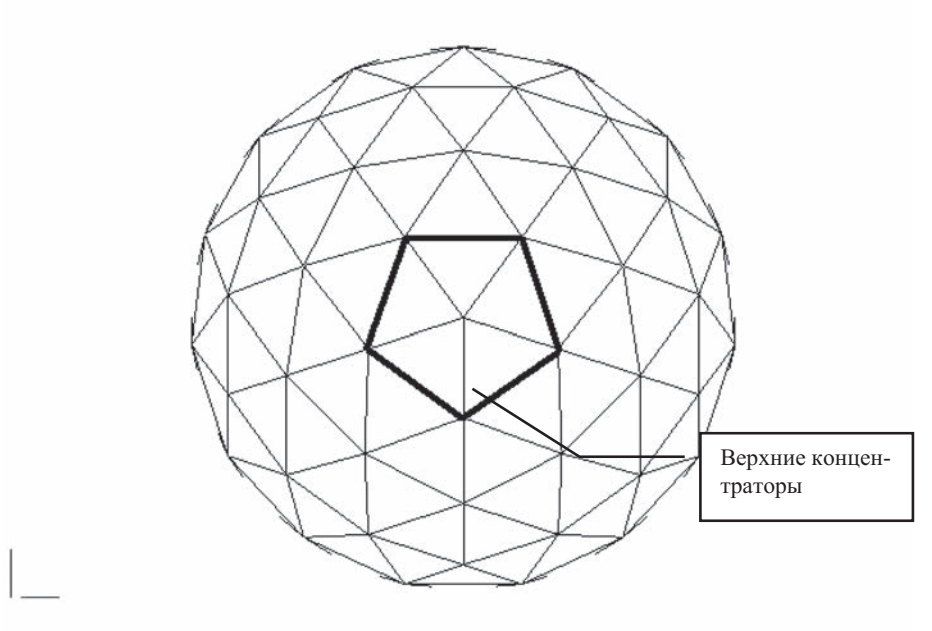
На программном комплексе Patran/Nastran были выполнены 23 расчета геодезических куполов системы «Р» радиусами 15 и 35 м под воздействием собственного веса (табл. σ_{comb}, МПа). При этом обнаружилось, что существует два локальных максимума: в нижней и в верхней частях купола. Жирной линией отделены решения с глобальным максимумом в нижней части купола $\sigma_{\text{comb низ}} > \sigma_{\text{comb верх}}$ (назовем такие результаты решением класса 3 НДС) от решений, характеризующихся наличием глобального максимума в верхней части купола (назовем такие результаты решением класса 4 НДС). Наибольшие напряжения возникают в горизонтально ориентированных стержнях (см. черные линии на рис. 2). Так же как в [8] замечено, что положение глобального максимума зависит от изменения параметров оболочки. Для геодезических куполов с мелкой разбивкой НДС второго контура приближается к НДС гладких куполов, т.е. концентратор размещается снизу, а величина концентратора определяется общей геометрической формой купола. Для определения максимального комбинированного напряжения для куполов с решениями класса 3 будем использовать формулу (5), которая также опирается на формулу вычисления напряжений в стержнях при изгибе и растяжении. Для решений класса 4 НДС стержней напряжения определяются локальными условиями, концентратор напряжений размещается в верхней части купола, что можно объяснить, опираясь на формулы вычисления напряжений в горизонтально и наклонно расположенных стержнях при чистом изгибе.

Численные результаты вычисления локальных максимумов комбинированных напряжений второго контура в Patran/Nastran

Вариант разбивки	$r = 15$	$r = 35$
2	$\sigma_{comb}^{i} = 18{,}3$ верх $l = 9{,}67$ $d = 0{,}07$ $h = 0{,}65$	$\sigma_{comb}^{i} = 102{,}0$ верх $l = 22{,}03$ $d = 0{,}07$ $h = 0{,}65$
2	$\sigma_{comb}^{i} = 19{,}7$ верх $l = 9{,}36$ $d = 0{,}07$ $h = 0{,}15$	$\sigma_{comb}^{i} = 99{,}5$ верх $l = 21{,}72$ $d = 0{,}07$ $h = 0{,}15$
3	—	$\sigma_{comb}^{i} = 46{,}7$ верх $l = 14{,}2$ $d = 0{,}07$ $h = 0{,}15$
5	—	$\sigma_{comb}^{i} = 17{,}7$ верх $l = 9{,}14$ $d = 0{,}07$ $h = 0{,}65$
5	—	$\sigma_{comb}^{i} = 24{,}9$ верх $l = 9{,}14$ $d = 0{,}05$ $h = 0{,}65$
5	—	$\sigma_{comb}^{i} = 16{,}8$ верх $l = 9{,}01$ $d = 0{,}07$ $h = 0{,}15$
5	—	$\sigma_{comb}^{i} = 12{,}9$ верх $l = 9{,}01$ $d = 0{,}09$ $h = 0{,}15$
5	$\sigma_{comb}^{i} = 3{,}87$ низ $l = 3{,}88$ $d = 0{,}07$ $h = 0{,}15$	—
5	$\sigma_{comb}^{i} = 3{,}40$ низ $l = 3{,}88$ $d = 0{,}09$ $h = 0{,}15$	—
6	—	$\sigma_{comb}^{i} = 10{,}4$ низ $l = 7{,}59$ $d = 0{,}07$ $h = 0{,}15$
6	—	$\sigma_{comb}^{i} = 8{,}75$ низ $l = 7{,}59$ $d = 0{,}09$ $h = 0{,}15$
7	—	$\sigma_{comb}^{i} = 9{,}36$ низ $= 6{,}55$ $d = 0{,}07$ $h = 0{,}15$
7	—	$\sigma_{comb}^{i} = 7{,}78$ низ $l = 6{,}55$ $d = 0{,}09$ $h = 0{,}15$
10	$\sigma_{comb}^{i} = 2{,}66$ низ $l = 2{,}06$ $d = 0{,}05$ $h = 0{,}65$	$\sigma_{comb}^{i} = 8{,}64$ низ $l = 4{,}62$ $d = 0{,}05$ $h = 0{,}15$
10	$\sigma_{comb}^{i} = 2{,}35$ низ $l = 2{,}06$ $d = 0{,}07$ $h = 0{,}65$	$\sigma_{comb}^{i} = 7{,}41$ низ $l = 4{,}62$ $d = 0{,}07$ $h = 0{,}15$
10	$\sigma_{comb}^{i} = 2{,}49$ низ $l = 1{,}90$ $d = 0{,}07$ $h = 0{,}15$	$\sigma_{comb}^{i} = 8{,}03$ низ $l = 4{,}69$ $d = 0{,}05$ $h = 0{,}65$
10	$\sigma_{comb}^{i} = 2{,}21$ низ $l = 1{,}90$ $d = 0{,}09$ $h = 0{,}15$	$\sigma_{comb}^{i} = 6{,}75$ низ $l = 4{,}69$ $d = 0{,}07$ $h = 0{,}65$



а



б

Рис. 2. Локальные концентраторы комбинированных напряжений: *а* и *б* — положения нижних и верхних концентраторов

Следовательно, для куполов класса 4 становится приемлемым другой вид формулы, а именно

$$\sigma_{\max} = f + \frac{m\rho g l^2 (1 - \alpha h)}{o + pd}, \qquad (7)$$

где f, МПа; m, o, м, p, α, 1/м — эмпирические параметры.

Для нахождения f, m, o, p воспользуемся так же минимизацией суммы квадратов отклонений (6).

С использованием программы нелинейной оптимизации методом Хука — Дживса получены искомые эмпирические параметры для формулы (5), a = 0,45805; b = 5,56409; c = –0,06705, м; e = 2,69911; α = 0,42663, 1/м; *Sum* = 0,4065; Disp = 0,03642; St = 0,190846.

Результаты для формулы (7) f = 0,27669, МПа; m = 2,88374; o = 0,04015, м; p = 3,06361; α = 0,04015, 1/м; *Sum* = 18,08557; Disp = 2,2607; St = 1,503561, где *Sum* — сумма квадратов отклонений; Disp — дисперсия; St — стандартное отклонение.

Полученные данные свидетельствуют о достаточно хорошем совпадении численных результатов и результатов по эмпирическим формулам, что является весомым аргументом в пользу обоснованности введенных формул.

Принадлежность к классу можно определить не выполняя решения в комплексе Patran/Nastran с помощью дискриминационного анализа [12]. Объекты в таблице расклассифицированы, т.е. в ней есть номинальный признак (верх — низ), который указывает к какому классу относится геодезический двухконтурный купол. Существует закономерная связь между значениями признаков (r, l) и признаком класса, т.е. между свойством объекта и его принадлежностью к 3-му или 4-му классу. Сформулируем такую связь в виде решающего правила. В данном случае предлагается описать границу, которая отделяет область одного класса от области другого класса, формулой

$$D = \frac{l}{r}. \qquad (8)$$

Обработав имеющиеся данные (рис. 3), получим D = 0,257 для выборки (D < 0,257 => Класс 3, D >0,257 => Класс 4). Распознавание будет заключаться в определении где находится контрольный геодезический купол по отношению к границе D = 0,257.

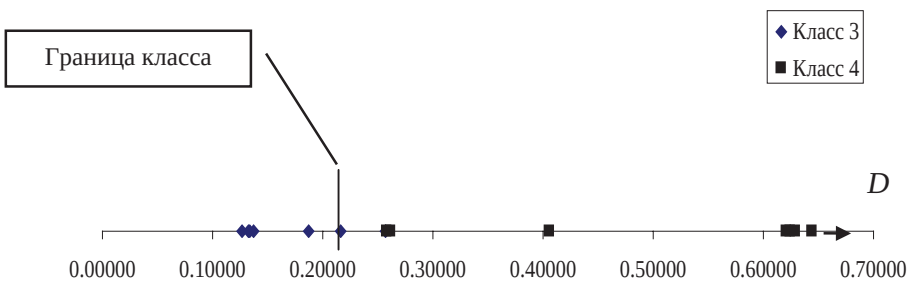


Рис. 3. Определение решающего правила

Выводы. 1. Используя численные расчеты напряженно-деформированного состояния полусферической геодезической оболочки от воздействия собственного веса, выявлены два класса решений, различающихся положением глобального максимума значений комбинированных напряжений растяжения в стержнях второго контура.

2. Получены эмпирические формулы для определения глобальных максимумов комбинированных напряжений в стержнях двухконтурных геодезических куполов.

Библиографический список

1. *Павлов Г.Н.* Основные концепции автоматизации архитектурного проектирования геодезических куполов и оболочек // Изв. вузов. Сер. «Строительство». 2005. № 10. С. 104—108.

2. *Павлов Г.Н., Супрун А.Н.* Геодезические купола — проектирование на современном уровне // САПР и графика. 2006. № 3. С. 25—27.

3. *Туполев М.С.* Геометрия сборных сферических куполов // Архитектура СССР. 1969. № 1. С. 9—11.

4. *Fuller R.B*. Geodesic dome // Perspecta. 1952, no. 1, pp. 30—33.

5. *Виноградов Г.Г.* Расчет строительных пространственных конструкций. М. : Стройиздат, Ленинградское отд., 1990. 264 с.

6. Автоматизированное проектирование и расчет на прочность одноконтурных геодезических оболочек из плоских элементов / А.Н. Супрун, Л.М. Дыскин, А.Ю. Платов, А.Я. Лахов // Вестник МГСУ. 2012. № 8. С. 226—233.

7. *Andres M., Harte R.* Buckling of concrete shells: a simplified numerical approach // Journal of the International association for shell and spatial structures: IASS. 2006, vol. 47, no. 3, December n. 152, pp. 163—175.

8. *Лахов А.Я.* Приближенный способ определения максимальных напряжений в геодезических одноконтурных куполах системы «П» от воздействия собственного веса // Приволжский научный журнал. 2013. № 3. С. 13—18.

9. *Skopinsky V.N.* A comparative study of three-dimensional and two-dimensional finite element analysis for intersecting shells // The Journal of strain analysis for Engineering Design. 2001, vol. 36, no. 3, pp. 313—322.

10. *Girling P.R.* Geodesic Shells. Thesis of the requirements for the degree of M.A.Sc., the department of Civil Engineering, University of British Columbia. 1957.

11. *Kubik M.* Structural Analysis of Geodesic Domes. Final Year Project. Durham University, School of Engineering. April 29, 2009.

12. *Елкина В.Н., Загоруйко Н.Г., Тимеркаев В.С.* Алгоритмы таксономии в информатике // Информатика и ее проблемы. 1972. № 4. С. 31—37.

Поступила в редакцию в декабре 2013 г.

Об авторе: **Лахов Андрей Яковлевич** — кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий, **Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет (ФГБОУ ВПО «ННГАСУ»)**, 603950, г. Н. Новгород, ул. Ильинская, д. 65, (831)430-54-92, факс: (831)430-19-36, alakhov99@nngasu.ru.

Для цитирования: *Лахов А.Я.* Приближенный способ определения максимальных растягивающих напряжений в стержнях двухконтурных геодезических куполов системы «Р» от воздействия собственного веса // Вестник МГСУ. 2014. № 1. С. 58—65.

A.Ya. Lakhov

THE APPROXIMATE METHOD OF MAXIMAL TENSILE STRESS DETERMINATION IN RODS OF DOUBLE-CONTOUR GEODETIC DOMES OF THE SYSTEM “R” EXPOSED TO DEAD LOAD

The article is a brief review of the research of stress-strain state of a structure that represents a hemispherical geodetic dome exposed to the dead load. Double-contour geodetic domes composed of plates and rods are the subject of the research. The process of their design has two stages: (a) design of geometric models of geodetic domes and (b) analysis of the domes.

The author demonstrates that the first stage can be implemented through the employment of the library of ArchiCAD objects. Supplementary research is needed to have

the second stage implemented. The objective of this research is to present the results of the research using computer-aided methods of metal structures modeling.

The article presents a study of the stress-strain state of a construction with a geodetic dome (shell) of the system “R” (classification of prof. G.N. Pavlov). The purpose of the paper is to present the results of numerical modeling in PATRAN/NASTRAN system in the form of approximate formulas. Approximate formulas are presented for calculation of global maximum of stress in second contour.

Key words: analytical research, numerical modeling, calculation, stress-strain state, approximate formulas, tensile stress, geodetic dome.

References

1. Pavlov G.N. Osnovnye kontseptsii avtomatizatsii arkhitekturnogo proektirovaniya geodezicheskikh kupolov i obolochek [Main Concepts of Architectural Design Automation of Geodetic Domes and Shells]. *Izvestiya vuzov. Seriya «Stroitel'stvo»* [News of Institutions of Higher Education. Construction Series]. 2005, no. 10, pp. 104—108.

2. Pavlov G.N., Suprun A.N. Geodezicheskie kupola — proektirovanie na sovremennom urovne [Geodetic Domes – Up-to-date Design]. *SAPR i grafika* [CAD Systems and Graphics]. 2006, no. 3, pp. 25—27.

3. Tupolev M.S. Geometriya sbornykh sfericheskikh kupolov [Geometry of Build-up Spherical Domes]. *Arkhitektura SSSR* [Architecture of the USSR]. 1969, no. 1, pp. 9—11.

4. Fuller R.B. Geodesic Dome. Perspecta. 1952, no. 1, pp. 30—33.

5. Vinogradov G.G. Raschet stroitel'nykh prostranstvennykh konstruktsiy [Analysis of Building Space Structures]. Moscow, Stroyizdat, Leningradskoe otd. Publ., 1990, 264 p.

6. Suprun A.N, Dyskin L.M., Platov A.Yu., Lakhov A.Ya. Avtomatizirovannoe proektirovanie i raschet na prochnost' odnokonturnykh geodezicheskikh obolochek iz ploskikh elementov [Automated Design and Strength Analysis of Singe-contour Geodetic Shells Composed of Flat Elements]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2012, no. 8, pp. 226—233.

7. Andres M., Harte R. Buckling of Concrete Shells: a Simplified Numerical Approach. Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures: IASS. 2006, vol. 47, no. 3, December n. 152, pp. 163—175.

8. Lakhov A.Ya. Priblizhennyy sposob opredeleniya maksimal'nykh napryazheniy v geodezicheskikh odnokonturnykh kupolakh sistemy “P” ot vozdeystviya sobstvennogo vesa [The Approximate Method of Maximal Stress Determination in Single-contour Geodetic Domes of the System “P” Exposed to Dead Load]. *Privolzhskiy nauchnyy zhurnal* [Volga Region Scientific Journal]. 2013, no. 3, pp. 13—18.

9. Skopinsky V.N. A Comparative Study of Three-dimensional and Two-dimensional Finite Element Analysis for Intersecting Shells. The Journal of Strain Analysis for Engineering Design. 2001, vol. 36. no. 3, pp. 313—322.

10. Girling P.R. Geodesic Shells. Thesis of the Requirements for the Degree of M.A.Sc., the Department of Civil Engineering, University of British Columbia. 1957.

11. Kubik M. Structural Analysis of Geodesic Domes. Final Year Project, Durham University, School of Engineering, April 29, 2009.

12. Elkina V.N., Zagoruyko N.G., Timerkaev V.S. Algoritmy taksonomii v informatike [Algorithms of Taxonomy in Computer Science]. *Informatika i ee problemy* [Computer Science and its Problems]. 1972, no. 4, pp. 31—37.

About the author: **Lakhov Andrey Yakovlevich** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Information Systems and Technologies, **Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering (NNGASU)**, 65 Ilyinskaya st., 603950, Nizhny Novgorod, Russian Federation; +7 (831) 278-01-82; alakhov99@nngasu.ru.

For citation: Lakhov A.Ya. Priblizhennyy sposob opredeleniya maksimal'nykh rastyagivayushchikh napryazheniy v sterzhnyakh dvukhkonturnykh geodezicheskikh kupolov sistemy «R» ot voz-deystviya sobstvennogo vesa [The Approximate Method of Maximal Tensile Stress Determination in Rods of Double-Contour Geodetic Domes of the System “R” Exposed to Dead Load]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 1, pp. 58—65.